Fourier 変換の性質

信号処理 - 第 7 講

村田 昇

前回のおさらい

Fourier 級数展開

- 定理

  $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は以下のように Fourier 級数展開される.

  $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

  $$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して以下で定義する.

  $$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Fourier 変換と反転公式

- 定義

  $\mathbb{R}$ 上の関数 f に対して

  $$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \text{(Fourier 変換)}$$

  $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \qquad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

  で定義する.

反転公式

- 定理

  $$f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon \omega^2 + i\omega x} d\omega$$

  より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば，上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

  $$\lim_{\epsilon \to 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

演習

練習問題 (再掲)

- 関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

  以下の関数の Fourier 変換を求めよ.
  - $f(x) = e^{-\alpha x}\Xi_{(0,\infty)}(x)$ $(\alpha > 0)$
  - $g(x) = e^{-\beta x^2}$ $(\beta > 0)$
  - $h(x) = \Xi_{(-1,1)}(x)$

Fourier 変換の性質

記法

- 関数の対応
  - f: もとの関数 (以下では Fourier 変換の存在を仮定)
  - $\hat{f}$: Fourier 変換
- 変換の演算子
  - $\mathcal{F}$: Fourier 変換
  - $\mathcal{F}^{-1}$: 逆 Fourier 変換

    例えば以下のように使う.

$$\hat{f} = \mathcal{F}[f], \qquad f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]$$
$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega), \qquad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)$$

- 引数に関する注意

    関数の引数 (変数) は単なる名前なので何でも良い.

$$\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)e^{-i\alpha\beta}d\beta$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)e^{i\alpha\beta}d\alpha$$

絶対可積分 ($L^1(-\infty,\infty)$)

- 定義

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty, \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

- 以下ではこの条件を満たす関数を考える
- Fourier 変換の存在 (各点)

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\omega)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| \\
&< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty
\end{aligned}
$$

$$
\|\hat{f}\|_{L^\infty} \left(= \sup_{\omega} |\hat{f}(\omega)| \right) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}
$$

- $|x| \to \infty$ での挙動

  適当に大きな値 $M > 0$ に対して

  $$
  |f(x)| > \epsilon > 0, \ |x| > M
  $$

  とすると，以下のように絶対可積分に矛盾する．

  $$
  \int_{-\infty}^{-M} |f(x)| dx + \int_{M}^{\infty} |f(x)| dx > \epsilon \times (\text{積分区間}) \to \infty
  $$

  したがって以下の性質が成り立つ．

  $$
  \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0
  $$

Parseval の定理

- 定理

  関数 f, g は $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

  $$
  \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega
  $$

  $$
  \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle
  $$

- 略証

  反転公式と同様に収束因子を考える．

  $$
  \begin{aligned}
  &\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\
  &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y) e^{-i\omega y}} dy \cdot e^{-\epsilon \omega^2} d\omega \\
  &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(y)} G_\epsilon(x - y) dx dy \\
  &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g_\epsilon(x)} dx
  \end{aligned}
  $$

  $\epsilon \to 0$ とすると定理の両辺が一致することがわかる．

Plancherel の定理

- 定理

  関数 f は $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の関係が成り立つ．

  $$
  \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega
  $$

  $$
  \|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}
  $$

Riemann-Lebesgue の定理 (補題)

- 定理

  関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ は滑らかで $f' \in L^1(\mathbb{R})$ とする．このとき以下の性質をもつ．

  $$\lim_{|\omega|\to\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

- 略証

  $$\begin{aligned}
  |\hat{f}(\omega)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right| \\
  &< \left|\left[\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-\infty}^{\infty}\right| + \left|\frac{1}{i\omega}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx\right| \\
  &< \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|\,dx \\
  &= \frac{1}{|\omega|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|f'\|_{L^1}
  \end{aligned}$$

  より明らか．

演習

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(-x)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f'$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f の Fourier 変換と関数 $g = f^{(k)}$ (k 階微分) の Fourier 変換の関係を考えよ．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 f, g の Fourier 変換と関数 $h = f*g$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

  $$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = f*g(x)$$

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(x-a)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

練習問題

- 以下の問題に答えよ

  関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(x) = f(bx)$ $(b > 0)$ の Fourier 変換の関係を考えよ．

演算との関係

Fourier 変換で用いる基本演算

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega\hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k\hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x-a)$ (移動)	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$1/b \cdot \hat{f}(\omega/b)$

演習

練習問題

- 関数

$$f(x) = \frac{1}{x - ia} \quad (a > 0)$$

  の Fourier 変換を求めよ.
  - *Fourier* **変換と逆** *Fourier* **変換の関係を利用**
  - 複素積分を利用 (Cauchy の積分定理・留数定理)

Fourier 変換の代表的な例

- 定義関数

  関数 Ξ を以下で定義する.

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

- 代表的な例

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x),\ x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega}{\omega}$
$e^{-ax^2},\ x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi}ie^{a\omega}\Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi}ie^{-a\omega}\Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2},\ x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a\lvert\omega\rvert}$

今回のまとめ

- Fourier 変換の性質
  - Fourier 変換な可能な関数
  - Fourier 変換の基本的な性質
    - Parseval の定理
    - Plancherel の定理
    - Riemann-Lebesgue の定理 (補題)
  - 関数の演算と Fourier 変換の関係