

# ベクトル空間

## 信号処理 - 第1講

村田 昇

## ベクトル空間

### 重ね合わせの原理

- 「複雑な波 (信号) も単純な波 (信号) の重ね合わせで表現できる」という現象を一般化した原理
- 数学・物理・工学分野でのモデル化や解析に用いる
  - 線形方程式・Fourier 解析
  - 量子力学
  - 電気回路
  - 信号処理
- 数学的に取り扱うための道具立て  
(線形) ベクトル空間 (vector space)

### ベクトル空間

- 定義  
次の性質をもつ集合を体  $K$  上の **ベクトル空間**  $V$  という。  
体とは四則演算が定義された集合のことで、 $K$  をベクトル空間  $V$  の **係数体** と呼ぶ。
- ベクトル空間の満たすべき性質
  1.  $a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$
  2.  $a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$  (結合則)
  3.  $a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a$  (交換則)
  4.  $\exists 0 \in V$  s.t.  $\forall a \in V, a + 0 = a$  (零元)
  5.  $\forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V$  s.t.  $a + (-a) = 0$  (逆元)
  6.  $\forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V$  (スカラー倍)
  7.  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$  (結合則)
  8.  $\exists 1 \in K$  s.t.  $\forall a \in V, 1a = a$  ( $K$  の単位元)
  9.  $\forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$  (分配則)
  10.  $\forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$  (分配則)

### ベクトル空間の例

- 幾何ベクトル  
平行移動で互いに移り合う有効線分。  
和は2つの有向線分で作られる平行四辺形の対角線で、スカラー倍は有向線分のスカラー倍で定義される。

$$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{E}^n$$

あるいはこの部分空間と同一視することができる。

- 数ベクトル

体  $K$  の  $n$  個の順序づけられた数の組. 和は成分ごとの和で, スカラ倍は各成分のスカラ倍で定義される.

- 関数空間  $C^m[0, 1]$

区間  $[0, 1]$  上の実数値関数で,  $m$  階微分可能な関数の集合. 和とスカラ倍は以下で定義される.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{和})$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad (\text{スカラ倍})$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合  $V$  のうち, 係数体を実数  $\mathbb{R}$  としてベクトル空間となるものはどれか?  
ただし  $f^{(k)}$  は  $f$  の  $k$  階微分を表す.
  - $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$  ( $n$  次元数ベクトルの集合)
  - $V = \{f(x) = ax + bx^2, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$   
(原点を通る 2 次関数の集合)
  - $V = \{f \in C^3[-\pi, \pi]\}$   
( $(-\pi, \pi)$  上で定義された 3 階微分可能な関数の集合)
  - $V = \{f \in C^3[-\pi, \pi] \text{ かつ } f^{(2)} = -f\}$

## 線形独立性

### 線形結合

- 定義

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, a_1, \dots, a_k \in V$  の重み付き線形和によって作られるベクトル

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in V$$

を  $a_1, \dots, a_k$  の **線形結合** という.

### 線形従属

- 定義

“全てが 0” ではないある係数の組  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  に対して

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

となるとき,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  は **線形従属** であるという.

また

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$$

となるとき,  $b$  は  $\{a_1, \dots, a_k\}$  に **線形従属** であるという.

### 線形独立

- 定義

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  に限られるとき,  $\{a_1, \dots, a_k\}$  は **線形独立** であるという.

## 線形従属・独立の例

- 関数空間  $C^m[0, 1]$

$$\{f(x) = x, g(x) = 2x\} \quad (\text{線形従属})$$

$$\{f(x) = x, h(x) = x^2\} \quad (\text{線形独立})$$

## 演習

### 練習問題

- 以下の集合のうち線形独立なものはどれか？  
ただし  $i$  は虚数単位で、係数体は  $\mathbb{C}$  とする。
  - $\{1, 1+x, 1+x+x^2\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1, \sin(x), \sin^2(x)\} \quad (x \in \mathbb{R})$
  - $\{1, \log(x), \log(2x)\} \quad (x > 0)$
  - $\{\exp(ix), \exp(3ix), \exp(5ix)\} \quad (x \in \mathbb{R})$

## 階数

### 極大独立集合

- 定義  
ベクトル空間  $V$  の有限部分集合  $S$  に対して、線形独立な部分集合  $B \subset S$  を考える。  
 $\forall b \in S - B$  において  $B \cup \{b\}$  が線形従属のとき、 $B$  は  $S$  の **極大独立集合** であるという。

### 階数

- 定義  
有限部分集合  $S$  の極大独立集合  $B$  はいろいろあるが、 $|B|$  (基数; cardinality) は一定となる。  
 $|B|$  を  $S$  の **階数 (rank)** といい、 $\text{rank} S$  で表す。

### 階数の性質

- 定理  
階数については以下が成り立つ。
  - $\text{rank} \emptyset = 0$
  - $\text{rank}(S \cup \{b\}) = \text{rank} S$  または  $\text{rank} S + 1$
  - $\forall b_1, b_2$  に対して

$$\text{rank}(S \cup \{b_1\}) = \text{rank}(S \cup \{b_2\}) = \text{rank} S$$

$$\Rightarrow \text{rank}(S \cup \{b_1, b_2\}) = \text{rank} S$$

## ベクトル空間の基底

### 基底

- 定義  
 $V$  の極大独立集合を  $V$  の基底と呼ぶ。  
 $V$  の階数、すなわち極大独立集合の基数を  $V$  の **次元 (dimension)** という。

## 基底の性質

- 定理

集合  $B$  を  $n$  次元ベクトル空間  $V_n$  の基底とする.

$$\begin{aligned}\dim V_n & \quad (\text{ベクトル空間の次元}) \\ &= \text{rank} V_n \quad (\text{ベクトル空間の階数}) \\ &= |B| \quad (\text{基底の基数}) \\ &= n\end{aligned}$$

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$  を  $V_n$  の基底とする.  $\forall b \in V_n$  は  $B$  に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

と一意に表される.

- 証明

2つの異なる表現があっても

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0$$

となることより,  $\lambda_i = \mu_i$  となることがわかる.

- 定理

$B = \{u_1, \dots, u_m\}$  をベクトル空間  $V_n$  の  $m (\leq n)$  個のベクトルの集合とする.

$\forall b \in V_n$  が  $B$  に線形従属ならば  $B$  は  $V_n$  の基底となる. したがって  $m = n$  である.

## 演習

### 練習問題

- 以下のベクトル空間の適当な基底を考え, 空間の次元を求めなさい.
  - 数ベクトル空間  $K^n$  ( $K$  は体)
  - 関数空間  $C^m[0, 1]$

## 今回のまとめ

- 体  $K$  上のベクトル空間
  - 線形性の条件を満たす集合のこと
    - \* 幾何ベクトル
    - \* 数ベクトル
    - \* 閉区間上の関数
  - これから取り扱う信号の数学的性質
- 独立と従属
  - 線形独立 (一次独立):  $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, n}$ 
$$\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$
  - 線形従属 (一次従属): 線形独立でないこと
- ベクトル空間の基底
  - 極大独立集合: 何か1つでも要素を加えると従属になってしまう集合
  - ベクトル空間  $V$  の次元はどうやって決めるか?  
 $V$  の中の線形独立な集合の最大の要素数 (基数, 集合のとり方によらず要素数は一定)
  - 基底: ベクトル空間  $V$  の極大独立集合を  $V$  の基底という