

講義ノート

信号処理

線形空間と Fourier 解析

村田 昇

version: 2020年8月26日

早稲田大学 先進理工学部
電気・情報生命工学科

はじめに

信号処理とは音・光・電磁波などを扱う技術です。信号を変換することによって、信号の中に含まれる重要な情報を抽出し、ノイズ除去、予測、カテゴリ判別などに利用することが目的であり、講義においては、フーリエ変換に代表される基底による信号の表現と取り扱いと、簡単なフィルタの理論を学びます。

なお、線形代数と複素関数の基礎的な知識は既に学んでいることを前提とします。

目次

はじめに	i
1 ベクトル空間	1
1.1 重ね合わせの原理	1
1.2 ベクトル空間	1
1.3 線形独立性	2
2 Hilbert 空間	7
2.1 内積空間	7
2.2 Hilbert 空間	7
3 正規直交基底	11
3.1 正規直交系	11
3.2 完全正規直交系	13
4 Fourier 級数展開	17
4.1 Fourier 展開の定義	17
4.2 完全性の証明	19
4.3 Fourier 展開の性質	21
4.3.1 不連続点の性質	21
4.3.2 係数の性質	22
4.3.3 畳み込みの性質	22
5 Fourier 変換	31
5.1 Fourier 変換の定義	31
5.2 反転公式の証明	32
5.3 Fourier 変換の基本的性質	33
5.3.1 逆変換と符号の関係	33
5.3.2 演算との関係	34
5.3.3 実例	34
6 線形フィルタ	35
6.1 フィルタ	35
6.2 線形時不変フィルタの数学的表現	36
6.3 因果的フィルタ	38
6.4 畳み込みの Fourier 変換	39
7 標本化定理	41
7.1 標本化と量子化	41
7.2 標本化定理	41
7.2.1 エイリアシング	43
8 離散 Fourier 変換	45
8.1 定義	45

1.1 重ね合わせの原理

「重ね合わせの原理」とは、数学・物理・工学など様々な分野に現れる「複雑な波も単純な波の重ね合わせで表現できる」という現象を一般化した原理で

- 線形方程式・Fourier 解析
- 量子力学
- 電気回路

などのモデル化や解析に使われている。この原理を数学的に取り扱うための道具立てが(線形)ベクトル空間(vector space)で、信号を数学的に扱うための基本的な考え方となる。

1.2 ベクトル空間

定義 1.1. 以下の性質をもつ集合を体 K (四則演算が定義された集合)上のベクトル空間 V という。

$$(L.1) \quad a, b \in V \Rightarrow a + b \in V$$

$$(L.2) \quad a, b, c \in V \Rightarrow (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (結合則)}$$

$$(L.3) \quad a, b \in V \Rightarrow a + b = b + a \text{ (交換則)}$$

$$(L.4) \quad \exists 0 \in V \text{ s.t. } \forall a \in V, a + 0 = a \text{ (零元)}$$

$$(L.5) \quad \forall a \in V \Rightarrow \exists -a \in V \text{ s.t. } a + (-a) = 0 \text{ (逆元)}$$

$$(L.6) \quad \forall \lambda \in K, \forall a \in V \Rightarrow \lambda a \in V \text{ (スカラー倍)}$$

$$(L.7) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) \text{ (結合則)}$$

$$(L.8) \quad \exists 1 \in K \text{ s.t. } \forall a \in V, 1a = a \text{ (} K \text{ の単位元)}$$

$$(L.9) \quad \forall \lambda \in K, \forall a, b \in V \Rightarrow \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \text{ (ベクトルの分配則)}$$

$$(L.10) \quad \forall \lambda, \mu \in K, \forall a \in V \Rightarrow (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \text{ (スカラーの分配則)}$$

K はベクトル空間 V の係数体と呼ぶことがある。

例 1.2 (幾何ベクトル). 平行移動で互いに移り合う有効線分. 和は2つの有向線分で作られる平行四辺形の対角線で, スカラー倍は有向線分のスカラー倍で定義される。

$$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{E}^n$$

あるいはこの部分空間と同一視することができる。

1.1 重ね合わせの原理	1
1.2 ベクトル空間	1
1.3 線形独立性	2

例 1.3 (数ベクトル). 体 K の n 個の順序づけられた数の組. 和は成分ごとの和で, スカラ倍は各成分のスカラ倍で定義される.

例 1.4 (関数空間 $C^m[0, 1]$). 区間 $[0, 1]$ 上の実数値関数で, m 階微分可能な関数の集合. 和とスカラ倍は以下で定義される.

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{(和)} \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) && \text{(スカラ倍)}\end{aligned}$$

1.3 線形独立性

ベクトル空間の基底を考えるためには, 以下の概念が重要である.

定義 1.5 (線形結合). $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K, a_1, \dots, a_k \in V$ の重み付き線形和によって作られるベクトル

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \in V$$

を a_1, \dots, a_k の**線形結合**という.

定義 1.6 (線形従属). 全てが 0 ではないある係数の組 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に対して

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

となるとき, $\{a_1, \dots, a_k\}$ は**線形従属**であるという. また,

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$$

となるとき, b は $\{a_1, \dots, a_k\}$ に**線形従属**であるという.

定義 1.7 (線形独立).

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = 0$$

となるのが $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ に限られるとき, $\{a_1, \dots, a_k\}$ は**線形独立**であるという.

線形従属なベクトル b

$$b = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$$

を考えたとき, 特殊な例は $b = 0$ の場合で, $k + 1$ 個のベクトル $\{0, a_1, \dots, a_k\}$ は常に線形従属となる.

例 1.8. 関数空間 $C^m[0, 1]$ での簡単な例.

$$\begin{aligned}f(x) = x, g(x) = 2x &&& \text{(線形従属)} \\ f(x) = x, h(x) = x^2 &&& \text{(線形独立)}\end{aligned}$$

定義 1.9 (極大独立集合). ベクトル空間 V の有限部分集合 S に対して, 線形独立な部分集合 $B \subset S$ を考える. $\forall b \in S - B$ において $B \cup \{b\}$ が線形従属のとき, B は**極大独立集合**であるという.

定義 1.10 (階数). 有限部分集合 S の極大独立集合 B はいろいろあるが, $|B|$ (基数; cardinality) は一定となる. $|B|$ を S の**階数** (rank) といい, $\text{rank } S$ で表す.

定理 1.11. 階数については以下が成り立つ.

1. $\text{rank } \emptyset = 0$
2. $\text{rank}(S \cup \{b\}) = \text{rank } S$ または $\text{rank } S + 1$
3. $\forall b_1, b_2$ に対して

$$\text{rank}(S \cup \{b_1\}) = \text{rank}(S \cup \{b_2\}) = \text{rank } S \Rightarrow \text{rank}(S \cup \{b_1, b_2\}) = \text{rank } S$$

集合 S が無限集合となる場合も同様に極大独立集合を考えることができる. これを用いて基底を定義する.

定義 1.12. V の極大独立集合を V の基底と呼ぶ. V の階数, すなわち極大独立集合の基数を V の**次元** (dimension) という.

定理 1.13. 集合 B を n 次元ベクトル空間 V_n の基底とする.

$$\begin{aligned} (\text{ベクトル空間の次元}) &= (\text{ベクトル空間の階数}) &= (\text{基底の基数}) \\ \dim V_n &= \text{rank } V_n &= |B| &= n \end{aligned}$$

定理 1.14. $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ を V_n の基底とする. $\forall b \in V_n$ は B に線形従属で,

$$b = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

と一意に表される.

証明. 2つの異なる表現があっても

$$(\lambda_1 - \mu_1)u_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)u_n = 0$$

となることより, $\lambda_i = \mu_i$ となることがわかる. □

定理 1.15. $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $u_i \in V_n$ とする. $\forall b \in V_n$, $\{b\} \cup B$ が線形従属ならば B は V_n の基底となる.

例 1.16. K^n において

$$e_k = (0, \dots, \overbrace{1}^k, \dots, 0)$$

と書くことにする. $\{e_1, \dots, e_n\}$ は K^n の基底であり, $\dim K^n = n$ となる. 自然基底と呼ぶことがある.

例 1.17. $C^m[0, 1]$ において, $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ の任意の有限部分集合は線形独立となる.

したがって有限な極大独立集合がない.

$C^m[0, 1]$ は無限次元となる.

まとめ

- ベクトル空間 (体 K 上のベクトル空間): 線形性の条件を満たす集合
 - 幾何ベクトル
 - 数ベクトル
 - 閉区間上の関数
- 線形独立 (一次独立): $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,n}$

$$\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

- 線形従属 (一次従属): 線形独立でないこと
- 極大独立集合: 何か1つでも要素を加えると従属になってしまう集合
- ベクトル空間 V の次元はどうやって決めるか?
 V の中の線形独立な集合の最大の要素数 (基数, 集合のとり方によらず要素数は一定)
- 基底: ベクトル空間 V の極大独立集合を V の基底という

練習問題

- (1) 以下の集合 V のうち, 係数体を実数 \mathbb{R} としてベクトル空間となるものはどれか?
- $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$ (3次元数ベクトルの集合)
 - $V = \{(x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3\}$ ($(0, 0, 1)$ を通るある平面上の数ベクトルの集合)
 - $V = \{f(x) = a + bx + cx^2, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$ (2次関数の集合)
 - $V = \{f(x) = a + b\sin(x) + c\cos(x), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
 - $V = \{f \in C^2[-1, 1]\}$ ($[-1, 1]$ 上で定義された2階微分可能な関数の集合)
 - $V = \{f \in C^2[-1, 1] \text{ かつ } f^{(2)} + 3f^{(1)} + 2f = 0\}$ ($f^{(k)}$ は f の k 階微分)
 - $V = \{f \in C^3[0, 1] \text{ かつ } f^{(3)} - f = 1\}$
 - $V = \{f \in C^2[-1, 1] \text{ かつ } f(x) = f(-x) \text{ (偶関数)}\}$
- (2) 以下の集合は係数体を実数としたベクトル空間とならないが, その理由を簡潔に述べよ.
- $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ かつ } x, y \geq 0\}$ (第1象限およびその境界の点)
 - $V = \{f \in C^m[0, 1] \text{ かつ } f(0) = 1 \text{ (切片が1)}\}$
- (3) 以下の \mathbb{R} 上の関数の集合のうち, 線形独立なものはどれか? ただし, 係数体は \mathbb{C} とする.
- $\{1, x, x^2, x^3\}$ ($x \in \mathbb{R}$)

-
- b) $\{x - 1, x + 1, x^2 - 1\}$ ($x \in \mathbb{R}$)
c) $\{\sin(x), \cos(x)\}$ ($x \in \mathbb{R}$)
d) $\{\sin(x), \sin(2x), \sin(3x)\}$ ($x \in \mathbb{R}$)
e) $\{\log(x), \log(2x), \log(3x)\}$ ($x > 0$)
f) $\{1, \exp(ix), \exp(-ix)\}$ ($x \in \mathbb{R}$)
g) $\{1, \sin(x), \cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x)\}$ ($x \in \mathbb{R}$)

2.1 内積空間

2.1 内積空間	7
2.2 Hilbert 空間	7

以下ではベクトル空間に少し条件を加えた空間 \mathcal{H} を考える.

定義 2.1 (内積). $u, v \in \mathcal{H}$ に対して, 次の性質を持つ 2 変数関数を **内積** という.

($\langle u, v \rangle, (u, v), u \cdot v$ などいろいろな書き方があるが, 以下では $\langle u, v \rangle$ を用いる)

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
なお, 体 K が実数の場合は $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)

定義 2.2 (内積空間). 内積が定義されたベクトル空間を **内積空間** という.

定義 2.3 (ノルム). $u \in \mathcal{H}$ に対して, その **ノルム** を

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

で定義する. ノルムは以下の性質を満たす.

1. $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$
(K としては \mathbb{R} か \mathbb{C} を考え, $|\cdot|$ は K 上の絶対値を表す)
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

定義 2.4 (距離). $d(u, v) = \|u - v\|$ を考えると d は **距離** になっている.

したがって内積が定義された空間では自然に距離を考えることができる.

2.2 Hilbert 空間

ある集合の中で無限に続く点列 u_n を考え, この点列がだんだん動かなくなる状況を考える.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(u_n, u_m) = 0. \text{ (Cauchy 列という)}$$

この点列の収束先 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ がもとの集合に含まれるとき, その集合は **完備** であるという.

- 例 2.5.** • 実数の区間 $[0, 1]$ は完備だが, $(0, 1)$ は完備でない.
• 有理数は完備でない.

定義 2.6 (Hilbert 空間). 内積空間 \mathcal{H} がノルムに関して完備なとき, **Hilbert 空間** という.

完備の厳密な定義は解析学の教科書を参照のこと.

例 2.7 (l^2 空間).

$$l^2 = \left\{ u = (u_1, u_2, \dots), u_i \in K, \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty \right\}$$

内積は

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \bar{v}_i$$

で定義すると, Cauchy-Schwarz の不等式 $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$ により必ず内積の値が存在することがわかる.

(完備性の証明はかなり面倒なので, 興味のあるものは教科書を参照のこと)

例 2.8 (L^2 空間).

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx$$

まとめ

- 内積: ベクトル空間の2つの要素に対して定義され, 以下の性質を持つ.
 1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ 特に $\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$
 2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (複素共役)
 3. $\langle \alpha u + \beta u', v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u', v \rangle$ (線形性)
- ノルム: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ で定義され, 以下の性質を持つ.
 1. $\|u\| \geq 0$ 特に $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$
 2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \forall \alpha \in K$
 3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式)
 4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)
- 完備性: 点列の収束先がもとの集合に含まれる.
- 内積空間: 内積が定義されたベクトル空間.
- Hilbert 空間: 完備な内積空間.

練習問題

(1) 係数体を \mathbb{C} とする内積空間 \mathcal{H} を考える. ベクトル $u, v \in \mathcal{H}$ の内積を $\langle u, v \rangle$, ベクトル $u \in \mathcal{H}$ のノルムを $\|u\|$ と書く. 内積およびノルムの性質として正しいものはどれか?

a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

b) $\|u\| = 0$ ならば $u = 0$

c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \|\alpha u\| = \alpha \|u\|$

d) $|\langle u, v \rangle| > \|u\| + \|v\|$

3.1 正規直交系

3.1 正規直交系 11
 3.2 完全正規直交系 13

定義 3.1 (正規直交系). Hilbert 空間 \mathcal{H} の部分集合 \mathcal{A} を考える.

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{A}, \phi \neq \psi \Rightarrow \langle \phi, \psi \rangle = 0$$

となるとき, \mathcal{A} を**直交系**という.

さらに

$$\forall \phi \in \mathcal{A} \Rightarrow \|\phi\| = \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle} = 1$$

となるとき, \mathcal{A} を**正規直交系**という.

例 3.2 (l^2 空間). 無限次元のベクトル空間 l^2 を考える. l^2 とは

$$u = (u_k)_{k=1,2,\dots}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$$

となる集合であった.

$$\phi_k = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^{k\text{番目}}, 0, \dots) \in l^2, k = 1, 2, \dots$$

とすると,

$$\langle \phi_k, \phi_h \rangle = \begin{cases} 0, & k \neq h \\ 1, & k = h \end{cases}$$

$$= \delta_{kh} \text{ (Kronecker's delta)}$$

なので, $\mathcal{A} = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ は正規直交系である.

定理 3.3. 可分な Hilbert 空間 \mathcal{H} の正規直交系は, 高々可算な集合である.

注意 3.4. **可分**とはその集合の中に稠密な可算部分集合を取ることができることである. 部分集合がもとの集合の中で稠密とは, もとの点の任意の点に対して, いくらでも近い点を部分集合の中から選ぶことができることをいい, 実数の中の有理数が典型的な例となっている. したがって実数や複素数は可分な集合である. 以降のいくつかの定理では可分なという枕詞が付くが, 実数や複素数値を取る数ベクトルや関数を考える際にはあまり気にしなくてよい.

証明. 証明の概略は以下の通り

- \mathcal{A} は正規直交系なので, $\forall \phi, \psi \in \mathcal{A}, \phi \neq \psi$ に対して

$$\|\phi - \psi\| = \sqrt{2}$$

- \mathcal{H} は可分なので、稠密な可算部分集合 \mathcal{D} をとることができる.
- $\phi \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ に対して $u_\phi \in \mathcal{D}$ を

$$\|\phi - u_\phi\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるようにとることができる (稠密なので必ずとれる).

- 三角不等式により

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \|\phi - \psi\| \\ &\leq \|\phi - u_\phi\| + \|u_\phi - u_\psi\| + \|u_\psi - \psi\| \\ &< \sqrt{2} + \|u_\phi - u_\psi\| \end{aligned}$$

したがって

$$\|u_\phi - u_\psi\| \neq 0 \Rightarrow u_\phi \neq u_\psi$$

つまり $\phi \rightarrow u_\phi$ は 1 対 1 対応にできる.

- \mathcal{D} は可算なので、 \mathcal{A} は高々可算であることがわかる.

□

定理 3.5. Hilbert 空間 \mathcal{H} の点 $\psi_k \in \mathcal{H}$ の集合 $\{\psi_k\}_{k=1,2,\dots}$ を考える. $\forall n$ に対して ψ_1, \dots, ψ_n が線形独立であるとする. このとき, 次の性質を満たす \mathcal{H} の正規直交系 $\{\phi_k\}$ が存在する.

- ϕ_n は ψ_1, \dots, ψ_n の線形結合,
- ψ_n は ϕ_1, \dots, ϕ_n の線形結合.

別の書き方をするのであれば

$$\text{span}\{\psi_k\}_{k=1,\dots,n} = \text{span}\{\phi_k\}_{k=1,\dots,n}$$

証明. Gram-Schmidt の直交化法を用いて具体的に構成すればよい.

- $\phi_1 = \|\psi_1\|^{-1}\psi_1$ (正規化)
- $\phi'_2 = \psi_2 - \langle \psi_2, \phi_1 \rangle \phi_1$ (直交化), $\phi_2 = \|\phi'_2\|^{-1}\phi'_2$ (正規化)
- ...
- $\phi'_n = \psi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \psi_n, \phi_k \rangle \phi_k$ (直交化), $\phi_n = \|\phi'_n\|^{-1}\phi'_n$ (正規化)

□

例 3.6 ($L^2(-1, 1)$). $\psi_0 = 1, \psi_1 = x, \psi_2 = x^2, \dots$ とする.

- $\phi_0 = 1/\sqrt{2}$
- $\phi'_1 = x - 2^{-1} \int_{-1}^1 x dx = x, \phi_1 = \sqrt{3}/\sqrt{2}x$
- (練習問題)

3.2 完全正規直交系

まず、正規直交系 $\{\phi_k\}_{k=1,2,\dots}$ の基本的な性質として以下のものがあることに注意する.

$$\forall n, \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \phi_j, \sum_{k=1}^n d_k \phi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \bar{d}_k, \quad c_j, d_k \in \mathbb{C}$$

定理 3.7 (Bessel の不等式). $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の正規直交系ならば,

$$\forall u \in \mathcal{H}, \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

が成り立つ.

証明.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\| u - \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k \right\|^2 \\ &= \left\langle u - \sum_j \langle u, \phi_j \rangle \phi_j, u - \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k \right\rangle \\ &= \|u\|^2 - \sum_k \overline{\langle u, \phi_k \rangle} \langle u, \phi_k \rangle - \sum_j \langle u, \phi_j \rangle \overline{\langle u, \phi_j \rangle} + \sum_{j,k} \langle u, \phi_j \rangle \overline{\langle u, \phi_k \rangle} \delta_{jk} \\ &= \|u\|^2 - \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

□

この特殊な場合を完全性の定義として用いる.

定義 3.8 (Parseval の等式). $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の正規直交系とする.

$$\forall u \in \mathcal{H}, \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$$

が成り立つとき、 $\{\phi_k\}$ を**完全正規直交系**という.

直感的には \mathcal{H} の任意の要素は $\{\phi_k\}$ で生成されることを意味している.

この同値な条件はいくつかある.

定理 3.9. $\{\phi_k\}$ が \mathcal{H} の正規直交系、 \mathcal{M} を $\{\phi_k\}$ が生成する閉部分空間とする. 以下の条件は同値である.

1. $\mathcal{H} = \mathcal{M}$
2. $\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow u = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \phi_k$
3. $\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$ (Parseval の等式)
4. $\forall u, v \in \mathcal{H} \Rightarrow \langle u, v \rangle = \sum_k \langle u, \phi_k \rangle \overline{\langle v, \phi_k \rangle}$
5. $\forall k, \langle u, \phi_k \rangle = 0 \Rightarrow u = 0$

定理 3.10. 可分な無限次元 Hilbert 空間には可算個の要素からなる完全正規直交系が存在する。

定理 3.11. 可分な無限次元 Hilbert 空間は l^2 空間と同型である。

例 3.12 (l^2 空間). $\mathcal{H} = l^2$

$$\phi_k = (0, \dots, 0, \overbrace{1}^k, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk}$$

例 3.13 (L^2 空間). $\mathcal{H} = L^2(-\pi, \pi)$ とする。

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)x} dx = \delta_{jk}$$

まとめ

- 直交系: 任意の 2 つの要素の内積が 0 となる集合.
- 正規直交系: 要素のノルムが 1 である直交系.
- 正規直交系の可算性: 可分な Hilbert 空間の正規直交系は高々可算の集合である.
- Gram-Schmidt の直交化法: 線形独立な集合から正規直交系を作る算法.
- 完全正規直交系: Parseval の等式

$$\forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow \|u\|^2 = \sum_k |\langle u, \phi_k \rangle|^2$$

を満たす正規直交系.

- 完全正規直交系の存在: 可分な Hilbert 空間には完全正規直交系が存在する.

練習問題

(1) 区間 $(0, 1)$ 上の実数値関数の空間

$$L^2(0, 1) = \left\{ f \mid \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

を考え, $f, g \in L^2(0, 1)$ の内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

で定義する. Gram-Schmidt の直交化法を用いて以下の集合から正規直交系を構成しなさい.

a)

$$\{1, x^2, x^4\}$$

b)

$$\{1, x, \sin(x)\}$$

c)

$$\{1, \cos(\pi x), \sin(\pi x)\}$$

d)

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

(2) 区間 $(-1, 1)$ 上の関数の空間

$$L^2(-1, 1) = \left\{ f \mid \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

を考え、内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義する。Gram-Schmidt の直交化法を用いて以下の集合から正規直交系を構成しなさい。

$$\{1, x, x^2\}$$

(3) 区間 $[0, 1]$ 上の 3 次関数の集合を $\mathcal{H} = \{f \mid f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, a, b, c, d \text{ は実数}\}$ とし、関数 $f, g \in \mathcal{H}$ の内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

で定義するとき、以下の問いに答えなさい。

- a) 集合 $\{1, x, x^2, x^3\}$ は区間 $[0, 1]$ 上の関数として独立であることを示しなさい。
- b) 集合 \mathcal{H} の完全正規直交系を 2 つ作りなさい。
ヒント: Gram-Schmidt の直交化を、異なる順番で行えばよい。
- c) 上で作った完全正規直交系について、正規性と直交性を確認しなさい。

前章では Hilbert 空間の正規直交系を考察した。また無限次元の空間の基底を考えるために、完全正規直交系を導入した。本章では、これらの結果を踏まえて、基底関数を用いた周期関数の具体的な展開法を議論する。

- 4.1 Fourier 展開の定義 17
- 4.2 完全性の証明 19
- 4.3 Fourier 展開の性質 21
 - 不連続点の性質 21
 - 係数の性質 22
 - 畳み込みの性質 22

4.1 Fourier 展開の定義

我々の扱う代表的な (性質の良い) 信号は周期的な信号であることが多い。ここでは 2π 周期の信号を考えることにする (周期は 1 でも 10 でも何でもよいが、しばらくは計算上都合の良い 2π を考える)。 \mathbb{R} 上の関数を $f(x)$ とすると、周期 2π を持つことは

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

で表される。1 周期を考える範囲のとり方はいろいろある。例えば $[-\pi, \pi]$ や $[0, 2\pi]$ など考えられるが、しばらくはやはり計算上取り扱いが簡単ということで前者を用いる。以下対象とする関数の族は 2 乗可積分な複素数値関数

$$L^2(-\pi, \pi) = \left\{ f \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

とする。

定理 4.1 (Fourier 級数展開). $f \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して f は以下のように Fourier 級数展開される。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy \end{aligned}$$

ただし

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

また、内積は $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

で定義されるものとする。

あとで示すように

$$\left\{ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

は $L^2(-\pi, \pi)$ 上の完全正規直交系となる。正規直交系であることは以下のように容易に確かめられる。

$$\begin{aligned} \langle \phi_m, \phi_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(m-n)x}}{i(m-n)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \quad (m \neq n), \end{aligned}$$

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 1$$

例 4.2 (Fourier 展開の例). $L^2(-\pi, \pi)$ を考える。区間 $(-\pi, \pi)$ 上でそれぞれ $f(x) = x$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$ となる関数の Fourier 展開は以下ようになる。

$$x = i \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$$

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{i(2m+1)x} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \end{aligned}$$

例 4.3 (級数和への応用). 上記の展開式から級数和に関していろいろな公式を得ることができる。例えば $f(x) = |x|$ に対して $x = 0$, $x = \pm\pi$ とすれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$f(x) = x^2$ に対して $x = 0$ とすれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$x = \pm\pi$ とすれば

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となる。

また、複素指数関数の性質 (Euler の公式) により以下のように変形することができることから、正弦関数と余弦関数で完全正規直交系を構成できることがわかる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} + \frac{a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}} \sin nx \right) \end{aligned}$$

直交性については各自確認し、正規化係数を求めよ。

特に $f(x)$ が実数値の場合

$$\frac{a_n + a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}, i \frac{a_n - a_{-n}}{\sqrt{2\pi}}$$

は実数になることから、 a_n と a_{-n} は複素共役の関係にあることがわかる。

$L^2(0, \pi)$ においては、

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx; n = 1, 2, \dots \right\}$$

がそれぞれ完全正規直交系となる。これは $(0, \pi)$ で定義された関数をそれぞれ偶関数、奇関数として $(-\pi, \pi)$ に拡張すれば、余弦関数または正弦関数のみで展開できることからわかる。

4.2 完全性の証明

関数 f が

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

と展開されたとする。Bessel の不等式 (の特殊な場合) から

$$|a_n| < \|f\|$$

であることはわかるが、

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

の和が存在するとは限らないので、以下のように収束因子を導入して無限和の極限を考える。

$$f_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} \phi_n(x)$$

$0 < r < 1$ とすれば上の級数和は必ず存在することに注意すると、級数和が収束するので積分と和を交換しても問題はないため

$$\begin{aligned} f_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} f(y) dy \end{aligned}$$

となる。ここで

$$P_r(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{inx}$$

とおく。右辺の和の各項は $(-\pi, \pi)$ の周期関数なので、 $(-\infty, \infty)$ に拡大可能である。 f も同様に $(-\infty, \infty)$ に拡大可能であるので、一周期の積分区間を適切に取り直して

$$f_r(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x-y) f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy$$

と書き変えることができる。

ところで

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-inx} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{1 - re^{ix}} + \frac{re^{-ix}}{1 - re^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{|1 - re^{ix}|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \end{aligned}$$

となるので、 $P_r(x)$ は以下の性質を持つことがわかる。

1. $P_r(x) > 0$ (3行目の表現より明らか)
2. P_r の一周期の積分は

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_n r^{|n|} e^{inx} dx = 1$$

3. $\forall \delta (0 < \delta < \pi)$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} P_r(x) = 0$$

これは $\cos x$ は上記の範囲では $\cos \delta$ で最大となることから

$$\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} \leq \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \delta} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$$

端的に言えば $r \rightarrow 1$ の極限で $P_r(x)$ は Dirac の delta 関数として働く。これより

$$f_r(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy$$

の積分は3つに分解して考えることができ

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$$

となるが、 δ と r は適当に選ぶことができるので、分解した積分の第1,3項では P_r をいくらでも小さくすることができ、また第2項では $f(x-y) - f(x)$ をいくらでも小さくすることができる。この結果、 δ と r とを適当に選ぶことによって3つの積分の和はいくらでも小さくなることがわかる。

以上より、各点 x において

$$\lim_{r \rightarrow 1} f_r(x) = f(x)$$

となることが示された。

4.3 Fourier 展開の性質

4.3.1 不連続点の性質

前節の議論では暗黙の内に関数 f の連続性を仮定しているが、 f に不連続点がある場合には、より詳細に収束を評価する必要がある。

まず $h > 0$ として

$$f(x-0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h), \quad f(x+0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$$

と書くことにする。これを用いると

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\delta}^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x)\} dy \right| \\ &= \left| \int_{-\delta}^0 P_r(y) \{f(x-y) - f(x+0)\} dy \right| + \left| \int_0^{\delta} P_r(y) \{f(x-y) - f(x-0)\} dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{-\delta < y < 0} |f(x-y) - f(x+0)| + \frac{1}{2} \sup_{0 < y < \delta} |f(x-y) - f(x-0)| \\ &\rightarrow^{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

なお P_r の積分の寄与については P_r が偶関数であることから

$$\int_{-\infty}^0 P_r(y) dy = \frac{1}{2}$$

となることは明らかであろう。したがって、関数 f の Fourier 展開を \tilde{f} と書くことにすると、

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

が成り立つ。これは f の不連続点で Fourier 展開は両側からの極限の平均値を取ることを意味している。

4.3.2 係数の性質

定理 4.4 (Riemann-Lebesgue の定理). $f \in L^1(-\pi, \pi)$ の Fourier 係数 a_n は

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$$

となる.

証明.

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq |a_n - a_n(r)| + |a_n(r)| \\ &= |a_n - a_n(r)| + |a_n| r^{|n|} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f - P_r * f\|_{L^1} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} r^{|n|} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

ここで r を十分小さくとれば第 1 項はいくらでも小さくすることができる. また $|n|$ を十分大きくとれば第 2 項はいくらでも小さくなるので, $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$ が示される. \square

$[-\pi, \pi]$ で連続で, $f(-\pi) = f(\pi)$ であり, ほとんどいたるところで f' が存在し, $f' \in L^2$ であるとする. f, f' の Fourier 展開を

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum a_n \phi_n(x) \\ f'(x) &= \sum b_n \phi_n(x) \end{aligned}$$

とすると, f を項別に微分することにより, a_n と b_n には

$$b_n = i n a_n$$

という関係が成立する. Riemann-Lebesgue の定理より $b_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) なので, $a_n = o(1/n)$ となる. つまり, 微分できるくらい滑らかな関数は $n \rightarrow \infty$ において $1/n$ より速く a_n が小さくなる (高周波成分が減衰する).

4.3.3 畳み込みの性質

関数 f の L^p ノルムを以下で定義する.

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

ただし, 積分区間は関数の適切な定義域である. このとき関数の積のノルムと関数のノルムの間には以下の関係が成り立つ.

定理 4.5 (Hölder の不等式). $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 0$ とする. このとき

$$\left| \int u(x)v(x) dx \right| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$$

証明. 対数関数の凸性から, 任意の $a, b > 0$ について

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

が成り立つ. また対数関数の単調性から

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}} \left| \int u(x)v(x)dx \right| &\leq \int \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p}} \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q}} dx \\ &\leq \frac{1}{p\|u\|_{L^p}} \int |u(x)|^p dx + \frac{1}{q\|v\|_{L^q}} \int |v(x)|^q dx \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

□

$p = q = 2$ のときが Schwarz の不等式に対応する.

定理 4.6.

$$h(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy$$

とするとき

$$\|h\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

証明. $1/p + 1/q = 1$ とする

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq \int |f(x-y)g(y)| dy \\ &= \int |f(x-y)| |g(y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|^{\frac{1}{q}} dy \\ &= \left(\int |f(x-y)|^p |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g(y)| dy \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

が成り立つ. これより

$$\begin{aligned} \int |h(x)|^p dx &\leq \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int \int |f(x-y)|^p |g(y)| dy dx \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int |f(x-y)|^p dx \int |g(y)| dy \\ &= \|g\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_{L^p}^p = \|g\|_{L^1}^p \|f\|_{L^p}^p \end{aligned}$$

□

関数 f と g の畳み込み (合成積; convolution) h は以下で定義される.

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \end{aligned}$$

2つの定義が同値であることは、関数 f, g は周期 2π をもつことに注意して、 $x-y=z$ として変数変換を行えば容易に確認できる.

先の定理より $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ なら $h \in L^1(-\pi, \pi)$ となる

$$\|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$$

ので、 h の Fourier 展開が存在することがわかる. ここで f, g, h の Fourier 係数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とすると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(x)e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y)g(y)dy e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int f(x-y)e^{-in(x-y)} g(y)e^{-iny} dx dy \\ &= \sqrt{2\pi} a_n b_n \end{aligned}$$

という関係が成り立つ.

まとめ

- Fourier 級数展開:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n(x)$$

- Fourier 基底の完全性:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

は完全正規直交系となる.

- Fourier 級数の性質

- 不連続点での Fourier 級数の値は平均値
- 連続 (滑らか) な関数に高い周波数は含まれない (Riemann-Lebesgue の定理)
- 畳み込みの Fourier 係数は元の関数の係数の積に比例する

練習問題

- (1) 周期が 2π で、区間 $(-\pi, \pi)$ 上で以下のように定義される周期関数の Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx)$$

を求めなさい。(周期関数であることに注意してグラフを描いてみること)

a)

$$f(x) = x$$

b)

$$f(x) = |x|$$

c)

$$f(x) = x^2$$

d)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

e)

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\pi/2 \\ 1, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1, & x \geq \pi/2 \end{cases}$$

f)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

g)

$$f(x) = |\sin(x)|$$

h)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

- (2) 問題 (1) の結果を用いて以下に答えなさい。

- a) (1.b) と (1.d) から、周期関数の微分積分に関して Fourier 級数がどのように振る舞うか考えなさい。

- b) (1.d) と (1.e) から, 周期関数の平行移動に関して Fourier 級数がどのように振る舞うか考えなさい.
- c) (1.d) と (1.e) から, 不連続点に関して Fourier 級数がどのように振る舞うか考えなさい.
- d) (1.a), (1.b), (1.c) の結果を \sin, \cos を用いて表しなさい.
- e) (1.b) の結果を用いて

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

を求めなさい. (x に適当な値を代入すればよい)

- f) (1.c) の結果を用いて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

を求めなさい.

- (3) 周期が l で, 区間 $(0, l)$ 上で以下のように定義される周期関数の Fourier 級数展開を求めなさい. (この区間での周期関数の完全正規直交系がどうなるか考え, 展開に用いる指数関数の肩に注意すること. なお, 前問の結果を用いてもよいが, 変数変換や平行移動の影響について整理しておくこと)

- a)

$$f(x) = x$$

- b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < l/2 \\ l-x, & x \geq l/2 \end{cases}$$

- c)

$$f(x) = |\sin(2\pi x/l)|$$

- (4) \mathbb{R} 上で周期 2 をもつ関数について考える. 関数 f, g の内積は

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (\bar{\cdot} \text{ は複素共役})$$

で定義されるものとして, 以下の問に答えよ.

- a) 関数 f の複素 Fourier 級数展開を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha n x}, \quad (n \text{ は整数})$$

とするとき, 適切な α を定めなさい.

- b) 前問で求めた基底関数系 $\{e^{i\alpha n x}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ から正規直交系を構成しなさい.

- c) 関数 f が区間 $[-1, 1]$ 上で以下の式で表されるとする.

$$f(x) = \begin{cases} x, & (-1 < x < 1) \\ 0, & (x = \pm 1) \end{cases}$$

関数 f の概形を図示しなさい. (周期関数であることや, 周期や値域などがわかるように描くこと)

- d) 関数 f の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
 e) 前問の結果を用いて, 関数 f を正弦関数と余弦関数で表しなさい.
 f) 関数 g が区間 $[-1, 1]$ 上で以下の式で表されるとする.

$$g(x) = |x|$$

関数 g の概形を図示しなさい.

- g) 関数 g の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
 h) 前問の結果を用いて, 関数 g を正弦関数と余弦関数で表しなさい.
 i) 関数 h が区間 $[-1, 1]$ 上で以下の式で表されるとする.

$$h(x) = \begin{cases} 1, & (x > 0) \\ 0, & (x = 0, \pm 1) \\ -1, & (x < 0) \end{cases}$$

関数 h の概形を図示しなさい.

- j) 関数 h の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
 k) 前問の結果を用いて, 関数 h を正弦関数と余弦関数で表しなさい.
 (5) \mathbb{R} 上で周期 T をもつ関数について考える. 以下の問に答えよ.

- a) 関数 f の複素 Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha n x}, \quad (n \text{ は整数})$$

を考えると, 適切な α の値を定めなさい.

- b) 以降の問では α は前問で求めた値を用いることとする.
 また, 関数 f, g の内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (\overline{\cdot} \text{ は複素共役})$$

で定義する. この内積の定義に十分注意して $e^{i\alpha n x}$ と $e^{i\alpha m x}$ の内積の値を求めよ.

- c) 半周期平行移動した関数の複素 Fourier 級数展開

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{i\alpha n x}$$

の係数 c'_n と, 前々問の関数 $f(x)$ の複素 Fourier 級数展開の係数 c_n の関係を説明しなさい.

d) 関数 f が区間 $[0, T]$ 上で以下の式で表されるとする.

$$f(x) = \begin{cases} |\sin(2\pi x/T)|, & 0 \leq x < T/2, \\ 0, & \text{それ以外.} \end{cases}$$

関数 f の概形を図示しなさい.

(周期関数であることや, 周期や値域などがわかるように描くこと.)

e) 関数 f の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
(複素の指数関数の和や差を用いて \sin 関数を表すと計算しやすい. また $n = 0, \pm 1$ の計算については特に注意すること.)

f)

g) 関数 g が区間 $[0, T]$ 上で以下の式で表されるとする.

$$g(x) = |\sin(2\pi x/T)|$$

関数 g の概形を図示しなさい.

h) 関数 g の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
i) 前問の結果を用いて, 関数 g を正弦関数と余弦関数で展開しなさい.

(6) \mathbb{R} 上で周期 1 をもつ関数について考える. 以下の問に答えよ.

a) 関数 f の複素 Fourier 級数展開

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\alpha n x}, \quad (n \text{ は整数})$$

を考えると, 適切な α の値を定めなさい.

b) 以降の間では α は前問で求めた値を用いることとする.
また, 関数 f, g の内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (\overline{\cdot} \text{ は複素共役})$$

で定義する. この内積の定義に十分注意して $e^{i\alpha n x}$ と $e^{i\alpha m x}$ の内積の値を求めよ.

c) 関数 f が区間 $[0, 1]$ で以下の式で表されるとする.

$$f(x) = |\cos(\pi x)|.$$

関数 f の概形を図示しなさい.

(周期関数であることや, 周期や値域などがわかるように描くこと.)

d) 関数 f の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.
e) 関数 g が区間 $[0, 1]$ で以下の式で表されるとする.

$$g(x) = |\cos(2\pi x)|.$$

関数 g の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.

(7) \mathbb{R} 上で周期 T をもつ関数について考える. 関数 f, g の内積を

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (\bar{\cdot} \text{は複素共役})$$

で定義するとき, 以下の問に答えよ.

- a) 正規直交系 $\{\phi_n(x) = \alpha e^{i\beta n x}; n \text{ は整数}\}$ を用いた複素 Fourier 級数展開を考えたい. 内積の定義に注意して, 適切な α, β を定めなさい.
- b) 以降の間では前問で求めた α, β を用いるものとする. 関数 f の複素 Fourier 級数展開を

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi_n(x)$$

とし, また

$$f(-x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \phi_n(x)$$

とするとき, a_n と b_n の関係を記せ.

c) 同様に

$$f(2x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(x)$$

とするとき, a_n と c_n の関係を記せ.

d) 同様に

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \phi_n(x)$$

とするとき, a_n と d_n の関係を記せ.

(8) \mathbb{R} 上で周期 2π をもつ関数について考える. 以下の問に答えよ.

a) 関数 f は区間 $[0, 2\pi)$ で以下の式で表される.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}.$$

関数 f の概形を図示しなさい.

(周期関数であることや, 周期や値域などがわかるように描くこと.)

b) 関数 f の複素 Fourier 級数展開を求めなさい.

c) 関数 g は区間 $[-\pi, \pi]$ で以下の式で表される.

$$g(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

関数 g の概形を図示しなさい.

d) 関数 g を三角関数 (\sin, \cos) を用いて表しなさい.

ヒント. 複素 Fourier 級数展開を求めて, \sin, \cos にまとめるとよい.

5.1 Fourier 変換の定義

周期 2π の Fourier 級数の正規直交系は

$$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

であった。これを一般の区間に広げて周期 T の関数を考えたい。このときの正規直交系としては

$$\psi_n = c_n e^{\frac{2\pi inx}{T}}, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

を考えれば良い。(T と 2π の対応関係を考えよ) 正規化定数 c_n は、内積として

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

を用いることとすれば、

$$|c_n|^2 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |e^{\frac{2\pi inx}{T}}|^2 dx = |c_n|^2 T$$

であるから

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{2\pi inx}{T}}, \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

とすれば良いことがわかる。したがって、周期 T の関数は

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi inx}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y) e^{-\frac{2\pi iny}{T}} dy$$

と展開できる。ここで $\frac{2\pi}{T} = \Delta$ とすると

$$f(x) = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \int_{-\frac{\pi}{\Delta}}^{\frac{\pi}{\Delta}} f(y) e^{-in\Delta y} dy$$

と書くことができる。 T が十分大きい (周期が無限大あるいは周期が無いとも言う)、すなわち Δ が十分小さい極限を考えるために、

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy$$

と置く。上記の Fourier 展開の積分部分は $\sqrt{2\pi} \hat{f}(n\Delta)$ で十分良く近似できることに注意すると

$$f(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Delta x} \hat{f}(n\Delta) \Delta$$

- 5.1 Fourier 変換の定義 31
- 5.2 反転公式の証明 32
- 5.3 Fourier 変換の基本的性質 33
 - 逆変換と符号の関係 33
 - 演算との関係 34
 - 実例 34

と Riemann 和の形で書くことができる. ここで $n\Delta \rightarrow \omega$, $\Delta \rightarrow d\omega$ とすれば,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta) \cdot \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) d\omega$$

となるので,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega && \text{(反転公式)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega(x-y)} dy \end{aligned}$$

となることが予想される (次節で証明する).

以上まとめると \mathbb{R} 上の関数 f に対して

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

で定義する.

また \mathbb{R}^d 上の関数についても同様に定義され, 係数は少し異なるが

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega \cdot x} dx \quad \text{(Fourier 変換)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega \cdot x} d\omega \quad \text{(逆 Fourier 変換)}$$

となる. なお $\omega \cdot x$ は $\omega \in \mathbb{R}^d$ と $x \in \mathbb{R}^d$ の内積である.

5.2 反転公式の証明

一般に $\hat{f}(\omega)$ は可積分かどうかわからないので, 以下では Poisson 核と似た原理を用いて反転公式を示そう.

収束因子 $e^{-\epsilon\omega^2}$ を用いて以下の積分を定義する.

$$\begin{aligned} f_{\epsilon}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x)} d\omega \end{aligned}$$

ここで指数の肩を整理すると

$$-\epsilon\omega^2 - i\omega(y-x) = -\epsilon \left(\omega + \frac{i(y-x)}{2} \right)^2 - \frac{(y-x)^2}{4\epsilon}$$

となる. また

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}$$

であるから (各自確かめよ), f_ϵ は

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\epsilon}} f(y) dy$$

となる. ここで

$$G_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\epsilon}}$$

とすると, f_ϵ は畳み込み

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x-y) f(y) dy = G_\epsilon * f(x)$$

で書くことができる. ここで, G_ϵ (Gauss 核と呼ばれることもある) は以下の性質を持つことが容易に確かめられる.

1. $G_\epsilon(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} G_\epsilon(x) dx = 1$
3. $\forall \delta > 0 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} G_\epsilon(x) dx = 0$

したがって Poisson 核と同様に, G_ϵ は $\epsilon \rightarrow 0$ において δ 関数になっていることが判るので, 以下の定理が成り立つ.

定理 5.1 (反転公式).

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-\epsilon\omega^2 + i\omega x} d\omega$$

より正確には $f \in L^1 \cap L^p$ であれば, 上の式は L^p の意味で成り立つと表現される.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|G_\epsilon * f - f\|_{L^p} = 0$$

5.3 Fourier 変換の基本的性質

以下, Fourier 変換の基本的な性質や実例を列挙する.

5.3.1 逆変換と符号の関係

Fourier 変換を $\mathcal{F}f$, 逆 Fourier 変換は \mathcal{F}^{-1} と書くことにする (例えば $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega)$ のように使う).

$$\mathcal{F}^{-1}g(z) = \mathcal{F}g(-z)$$

注: 符号が反転しているだけなので, ほとんど対称だと思ってよい. すなわち, Fourier 変換 $\mathcal{F}f$ について成り立つことは逆 Fourier 変換 \mathcal{F}^{-1} でも成り立つ.

5.3.2 演算との関係

関数 f を変換したものを, Fourier 変換 \hat{f} を用いて表わすと以下のようになる.

関数	Fourier 変換
$f'(x)$ (微分)	$i\omega \hat{f}(\omega)$
$f^{(k)}(x)$ (k 階微分)	$(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$
$f * g(x)$ (畳み込み)	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$
$T_a f(x) = f(x - a)$ (移動)	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$D_b f(x) = f(bx)$ (拡大縮小)	$\frac{1}{b} \hat{f}\left(\frac{\omega}{b}\right)$

5.3.3 実例

関数 Ξ を

$$\Xi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する.

関数	Fourier 変換
$\Xi_{(-1,1)}(x), x \in \mathbb{R}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega}{\omega}$
$e^{-ax^2}, x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$\frac{1}{x-ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{2\pi} i e^{a\omega} \Xi_{(-\infty,0)}(\omega)$
$\frac{1}{x+ia}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$-\sqrt{2\pi} i e^{-a\omega} \Xi_{(0,\infty)}(\omega)$
$\frac{a}{x^2+a^2}, x \in \mathbb{R}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \omega }$

しばらく音声や音楽などの時系列信号を意識して話を進める。これまででは $f(x)$ と書いてきたが、以降では時間を明示的に表すために $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ のように書く。

- 6.1 フィルタ 35
- 6.2 線形時不変フィルタの数学的表現 36
- 6.3 因果的フィルタ 38
- 6.4 畳み込みの Fourier 変換 39

6.1 フィルタ

入力 $f(t)$ を変換して出力 $g(t)$ を生成する機構



を一般にフィルタという。

例 6.1. 例えばエレキギターの音色を変える機器であるエフェクター (effects unit, pedal) には以下のようなものがある

歪み オーバードライブ / ディストーション / ファズ

モジュレーション コーラス / フランジャー / フェイガー / トレモロ

空間系 リバーブ / デイレイ

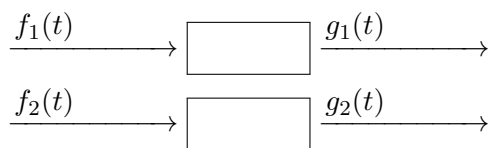
フィルタ ワウ / ピッチシフター / ワーミー

その他 イコライザー / コンプレッサー / ノイズゲート

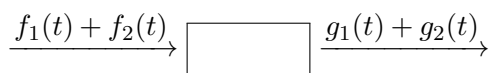
これらは元来のギターの音色を電気的に変換して出力する装置である。

いろいろな機能を持つフィルタを考えることができるが、ここでは理論的に扱い易い性質を想定して、基本的なフィルタを考えることにする。

理論的に扱い易い第1の性質としては**線形性** (linearity) がある。これは2つの入出力関係



を考えたとき、入力の線形結合がそのまま出力に反映される性質



を指す。このような性質を持つフィルタを**線形フィルタ** (linear filter) と呼ぶ。この性質がある場合、信号が基底関数 $\phi_n(t)$ によって

$$f(t) = \sum_n a_n \phi_n(t)$$

と分解できる場合は、フィルタによる基底の変換

$$\phi_n(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \psi_n(t)$$

が得られれば、出力 $g(t)$ は変換された基底の合成

$$g(t) = \sum_n a_n \psi_n(t)$$

によって表すことができるので、基底の性質にだけ着目すれば十分であることがわかる。

我々が扱う多くのフィルタはこの性質を持っているが、いくつか駄目な例もある。先に挙げたエフェクターの例では、ディストーションやオーバードライブなどは入力信号の振幅の大きさによって歪みが生じるもので、信号の変換において非線形作用を持つことがわかる。これらは**非線形フィルタ** (non-linear filter) と呼ばれる。

もう一つの重要な性質は時間によらずフィルタの性質は不変となる**時不変性** (time-invariance) である。これは入力の時刻が s ずれた場合、出力も s だけずれる性質を指し、

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow g(t) \\ f(t-s) & \longrightarrow & \boxed{} \longrightarrow g(t-s) \end{array}$$

となることである。

6.2 線形時不変フィルタの数学的表現

信号 $f(t)$ の階段関数近似

$$f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)$$

を考える。ここで $\Delta(t)$ は区間 $(0, \tau)$ で高さ 1 となる単一の矩形波で、時間 $t_n = n\tau$ だけシフトした矩形波の集合

$$\Delta(t-t_n) = \Delta(t-n\tau), \quad (n \text{ は整数})$$

は階段関数で表される信号の基底と考えてよい。

以下では Δ の線形和で表される信号がフィルタによってどう変換されるか考えてみよう。

$$\frac{f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)}{\longrightarrow} \boxed{} \longrightarrow ?$$

まず、単一の矩形波 $\Delta(t)$ はフィルタによって $H(t)$ に変換されるとする。

$$\Delta(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow H(t)$$

このとき、矩形波 Δ を平行移動したものはフィルタの時不変性により H を平行移動したものとなる。

$$\begin{array}{l} \Delta(t-t_1) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow H(t-t_1) \\ \Delta(t-t_2) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow H(t-t_2) \\ \vdots \\ \Delta(t-t_n) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow H(t-t_n) \end{array}$$

またフィルタの線形性から入力の変数倍は出力の変数倍となる。

$$\begin{array}{l} a_1 \times \Delta(t-t_1) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_1 \times H(t-t_1) \\ a_2 \times \Delta(t-t_2) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_2 \times H(t-t_2) \\ \dots \\ a_n \times \Delta(t-t_n) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow a_n \times H(t-t_n) \end{array}$$

このことから階段関数 $f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)$ はフィルタにより H の線形和である $g_\tau(t) = \sum_n a_n H(t-t_n)$ に変換されることがわかる。

$$\frac{f_\tau(t) = \sum_n a_n \Delta(t-t_n)}{\longrightarrow} \boxed{} \longrightarrow \frac{g_\tau(t) = \sum_n a_n H(t-t_n)}{\longrightarrow}$$

ところで、信号 $f(t)$ の階段関数近似の係数は $a_n = f(t_n)$ とすれば良いので、

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \sum_n f(t_n) \Delta(t-t_n) = \sum_n f(n\tau) \Delta(t-n\tau) \\ g_\tau(t) &= \sum_n f(t_n) H(t-t_n) = \sum_n f(n\tau) H(t-n\tau) \end{aligned}$$

となる。関数 $\Delta(t)$ は区間 $(0, \tau)$ で高さ 1 となる単一の矩形波であったので、

$$\delta_\tau(t) = \Delta(t)/\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \delta(t) \text{ (デルタ関数)}$$

となることに注意すると、

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= \sum_n f(n\tau) \Delta(t-n\tau) / \tau \cdot \tau \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int f(s) \delta(t-s) ds \\ g_\tau(t) &= \sum_n f(n\tau) H(t-n\tau) / \tau \cdot \tau \\ &\xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int f(s) h(t-s) ds \end{aligned}$$

となる。ただし

$$H(t)/\tau \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} h(t)$$

である。すなわち以下の関係が成り立つ。

$$\frac{f(t) = \int f(s)\delta(t-s)ds}{\longrightarrow} \boxed{} \frac{g(t) = \int f(s)h(t-s)ds}{\longrightarrow}$$

変換された信号は畳み込み積分

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)ds$$

で表現されることになる。特に

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s)h(t-s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\delta(t-s)ds$$

となる。これは $h(t)$ が $\delta(t)$ を入力した時の出力に対応することを表わしているため、 $h(t)$ をフィルタの**インパルス応答** (impulse response) という。一方

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s)ds$$

であるから、出力 $g(t)$ の畳み込み積分による表現では、 $f(s)$ が時刻 s のインパルス $\delta(t-s)$ の高さを表わし、それら全ての重ね合わせで出力波形が作られることを示している。

6.3 因果的フィルタ

音響信号のような時間信号を変換する一般的なフィルタの場合、時刻 0 にインパルスが入力される以前には何も出力がされないで、インパルス応答は

$$h(t) = 0 \quad (t < 0)$$

となるはずである。このようなフィルタを**因果的** (causal) という。因果的なフィルタでは

$$h(t-s) = 0 \quad (t < s)$$

なので、時刻 t での出力は時刻 t 以前での入力のみにより定まるので、積分範囲を

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(s)h(t-s)ds$$

としてよいことがわかる。

例えば、理想的なローパスフィルタは非因果的となるので、物理的な回路では作成することができない。

- 画像 (画素の上下左右に因果律があるわけではない)
- オフラインの信号処理 (時間遅れを許容するデジタル信号処理)

では因果的ではないフィルタも用いられる。

6.4 畳み込みの Fourier 変換

線形時不変フィルタの機能はインパルス応答の畳み込み積分として表されること

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds = h * f(x)$$

が判った。畳み込みは良く出てくるので、右辺のように*を使って書く流儀が多いので、本稿でもこれを採用する。

さて、入力信号 $f(t)$ とインパルス応答 $h(t)$ の Fourier 変換

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \\ \hat{h}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{i\omega t} dt\end{aligned}$$

が与えられたとき、出力信号 $g(t)$ の Fourier 変換は以下のように書ける。

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)ds \right) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)f(s)e^{i\omega(t-s)}e^{i\omega s} dt ds \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)e^{i\omega(t-s)} dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\omega s} ds \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \hat{h}(\omega) \cdot \hat{f}(\omega)\end{aligned}$$

したがって、Fourier 変換した周波数領域で見るとフィルタの機能は周波数毎の振幅と位相の変換として理解できることがわかる。

これを利用して、フィルタの性質を調べたり、フィルタを設計する指針を考えたりすることができる。

7.1 標本化と量子化

7.1 標本化と量子化	41
7.2 標本化定理	41
エイリアシング	43

デジタル信号処理のために必要な離散化 (discretization) には以下がある。

- 標本化 (sampling): 時間の離散化
- 量子化 (quantization): 数値の離散化

量子化は計算機で扱う数値の丸め誤差の問題で、この講義では扱わない。

連続データを標本化によって離散データにしたとき、明らかに情報が落ちているように見える。「離散データから連続データを再構成することができないのか?」「再構成することはできるのであれば、その条件は何か?」という問いに対する答えが以下に述べる標本化定理である。

注意 7.1. 定理の呼び名は色々あり、代表的なものは以下のとおりである。

- Shannon の標本化定理
- Nyquist-Shannon の標本化定理
- Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- Whittaker-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- Whittaker-Nyquist-Shannon-Kotelnikov の標本化定理
- 染谷の標本化定理 (日本でしか言われならしい)

7.2 標本化定理

定理の主張は以下のように要約される。

定理 7.2. 信号 $f(t)$ が B [Hz] 未満の周波数しか含んでいないなら、 $1/2B$ 秒ごとのサンプル点で元の信号は完全に求められる。

1 秒間に取りのサンプル数 f_s [Hz] をサンプリング周波数 (sampling frequency) と言い、再構成するために必要なサンプリング周波数の下限 $2B$ [Hz] を Nyquist レート (Nyquist rate) と言う。また信号に含まれる周波数の上限 B [Hz] を Nyquist 周波数 (Nyquist frequency) と言う。

証明. 信号 $f(t)$ の Fourier 変換を $\hat{f}(\omega)$ とする。定理の仮定より \hat{f} の台 (0 でない領域) は $(-2\pi B, 2\pi B)$ である。ただし、Fourier 変換においては角周波数を用いるので、 B [Hz] = $2\pi B$ [rad] であることに注意する。 \hat{f} を $2\pi \cdot 2B$ ごとに繰り返したものを f とす

ると、これは周期 $2\pi \cdot 2B$ を持つ周期関数なので Fourier 級数展開が存在する。周期 2π の Fourier 級数展開の基底を

$$\phi_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\omega}$$

とすると、周期 $2\pi \cdot 2B$ の基底は

$$\psi_n(\omega) = \phi_n\left(\frac{\omega}{2B}\right) \frac{1}{\sqrt{2B}}$$

となる (各自正規直交性を確認せよ)。これを用いると \tilde{f} の Fourier 級数展開は

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n(\omega) \\ a_n &= \langle \tilde{f}, \psi_n \rangle \end{aligned}$$

となるので、具体的に計算すると

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \tilde{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} \hat{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{-i\left(\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{n}{2B}\right)\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \end{aligned}$$

となる。1行目から2行目への変形は、積分範囲に注意して \tilde{f} の1周期分の積分をもとの \hat{f} で置き換えたものである。2行目から3行目への変形は、 \hat{f} が区間 $(-2\pi B, 2\pi B)$ の外では0であることを用いて積分範囲を $(-\infty, \infty)$ としたものである。3行目から4行目への変形は、 $x = -n/2B$ における \hat{f} の Fourier 逆変換

$$f\left(-\frac{n}{2B}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\left(-\frac{n}{2B}\right)\xi} d\xi$$

になっていることを用いたものである。
ところで

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_B(\omega) \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

と書くことができる。ただし

$$\hat{h}_B = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり、 \tilde{f} から \hat{f} を取り出すための周波数フィルタである。これを用いると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_B(\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{n}{2B})\omega} f\left(-\frac{n}{2B}\right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi \cdot 2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \int_{-2\pi B}^{2\pi B} e^{i(t+\frac{n}{2B})\omega} d\omega \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi B \left(t + \frac{n}{2B}\right)}{2\pi B \left(t + \frac{n}{2B}\right)} f\left(-\frac{n}{2B}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi B \left(t - \frac{n}{2B}\right)}{2\pi B \left(t - \frac{n}{2B}\right)} f\left(\frac{n}{2B}\right) \end{aligned}$$

となる。1行目から2行目への変形は、 \hat{h}_B の定義に従って積分領域を書き換えたものである。2行目から3行目の積分は各自確認せよ。3行目から4行目は $-n$ を n に置き換えて、式を見やすくしたものである。

以上から、 $f(t)$ は $1/2B$ ごとのサンプル点 $f(n/2B)$ を用いて完全に再構成できることがわかる。□

直感的には正弦波は山と谷の値が与えられれば補間できるので、一番高い周波数でも1周期の間に2点の標本があれば良いことがわかる。厳密には、2点だけ与えられても一番高い周波数は不定になる。これは次のような波形を考えてみるとよい。

$$f(t) = \frac{\cos(2\pi Bt + \theta)}{\cos \theta} = \cos(2\pi Bt) - \sin(2\pi Bt) \tan \theta$$

この信号は周波数 B で θ の値によって位相と振幅が異なるが、標本点を $\frac{n}{2B}$ とすると

$$f\left(\frac{n}{2B}\right) = (-1)^n - 0 \cdot \tan \theta = (-1)^n$$

となり、 θ によらないことがわかる。したがって、サンプリングレート $2B$ の標本点からは、 θ の値を推定することはできない。

7.2.1 エイリアシング

標本化定理の原理がうまく行くのは、「信号の Fourier 変換が $(-2\pi B, 2\pi B)$ 以外で0となっている」ことである。これが成り立たない場合には、 $4\pi B$ 周期の関数 \tilde{f} を構成する際に重なりが生じ、バンドパスフィルタで $(-2\pi B, 2\pi B)$ 領域を切り出しても元に戻すことができない問題が起こる。これをエイリアシング (aliasing) または折り返し雑音 (folding noise) と言う。

8.1 定義

定義は以下のとおりである.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-i \frac{2\pi}{N} nt}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

慣習的に n や t は 1 からではなく 0 からとなることに注意する.
ここで

$$\alpha = e^{i \frac{2\pi}{N}}$$

と置くと,

$$\alpha^N = e^{2\pi i} = 1 \quad (1 \text{ の } N \text{ 乗根})$$

となる. α を用いて定義式を書き下すと

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \alpha^{-nt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(f(0) \alpha^{-n \cdot 0} + f(1) \alpha^{-n \cdot 1} + f(2) \alpha^{-n \cdot 2} + \dots + f(N-1) \alpha^{-n \cdot (N-1)} \right) \end{aligned}$$

であるから, 行列を用いると

$$\begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \alpha^{-2} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \alpha^{-2(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

と書くことができ, 時間領域のベクトル f を周波数領域のベクトル \hat{f} に変換する手続きが線形変換として表されることがわかる. 以降, ベクトル・行列で簡略に表記する場合は変換行列を F と書くことにする.

$$\hat{f} = Ff$$

なお, 行列 F は $N \times N$ の要素からなるが, α は 1 の N 乗根であるので, 値としては (1 を含めて) N 種類しかない.

逆変換は以下で定義される.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e^{i \frac{2\pi}{N} nt}, \quad (t = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

離散 Fourier 変換と同様に行列表記すると

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \alpha^2 & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \alpha^{2(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{pmatrix}$$

となる. 変換行列を F^* で表し, まとめて

$$\mathbf{f} = F^* \hat{\mathbf{f}}$$

と書くことにする.

変換・逆変換の関係を確認するために, 行列 F, F^* の積を計算してみよう.

$$F^* F = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^1 & \dots & \alpha^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{(N-1)} & \dots & \alpha^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha^{-(N-1)} & \dots & \alpha^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

i 行 j 列成分は

$$\begin{aligned} (F^* F)_{ij} &= \frac{1}{N} \left(1 + \alpha^{(i-1)} + \alpha^{2(i-1)} + \dots + \alpha^{(N-1)(i-1)} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^{-(j-1)} \\ \alpha^{-2(j-1)} \\ \vdots \\ \alpha^{-(N-1)(j-1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{N} \left(1 + \alpha^{(i-j)} + \alpha^{2(i-j)} + \dots + \alpha^{(N-1)(i-j)} \right) \\ &= \begin{cases} 1, & i = j \\ \frac{1}{N} \frac{1 - \alpha^{N(i-j)}}{1 - \alpha^{(i-j)}}, & i \neq j \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

と計算される. 交換した積も同様に

$$(F F^*)_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

となる. 以上より

$$F^* \hat{\mathbf{f}} = F^* F \mathbf{f} = \mathbf{f}$$

および

$$F \mathbf{f} = F F^* \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}}$$

となり, 変換と逆変換の関係が確認された.

索引

- Bessel's inequality, 13
- cardinality, 2
- complete, 7
- complete orthonormal basis, 13
- convolution, 24

- dimension, 3
- distance, 7

- Fourier series, 17
- Fourier series expansion, 17

- Gram – Schmidt process, 12

- Hölder's inequality, 22
- Hilbert space, 8

- inner product, 7
- inner product space, 7

- norm, 7

- orthogonal basis, 11
- orthonormal basis, 11

- Parseval's equality, 13

- rank, 2
- Riemann-Lebesgue lemma, 22

- Schwarz's inequality, 23
- separable, 11

- vector space, 1

- 階数, 2
- 数ベクトル, 2
- 可分, 11
- 完全正規直交系, 13
- 完備, 7
- 幾何ベクトル, 1
- 基数, 2
- 極大独立集合, 2
- 距離, 7
- 逆元, 1
- Gram-Schmidt の直交化法, 12
- 結合則, 1
- 交換則, 1

- 合成積, 24
- Schwarz の不等式, 23
- 次元, 3
- スカラ倍, 1
- 正規直交系, 11
- 線形結合, 2
- 線形従属, 2
- 線形独立, 2
- 零元, 1
- 畳み込み, 24
- 単位元, 1
- 直交系, 11
- 内積, 7
- 内積空間, 7
- ノルム, 7
- Parseval の等式, 13
- Hilbert 空間, 8
- 分配則
 - スカラの—, 1
 - ベクトルの—, 1
- Hölder の不等式, 22
- ベクトル空間, 1
- Bessel の不等式, 13
- Riemann-Lebesgue の定理, 22
- Fourier 級数展開, 17