推定

確率分布を推定する

村田 昇

2020.06.19

推定とは

統計解析の目的

- 観測データを確率変数の実現値と考えてモデル化
- 観測データの背後の確率分布を **推定**
  - 分布のもつ特性量 (平均や分散など) を評価する
  - 分布そのもの (確率関数や確率密度) を決定する
- 統計学で広く利用されている推定方法を説明
  - 点推定
  - 区間推定

推定の標準的な枠組

- 観測データは独立同分布な確率変数列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- X_i の従う共通の法則 $\mathcal{L}$ を想定
  - $\mathcal{L}$ として全ての分布を考察対象とすることは困難
    - 対象とする範囲が広くなりすぎる
    - データ数 n が大きくないと意味のある結論を導き出せない
  - 確率分布 $\mathcal{L}$ を特徴づけるパラメタ θ を考察対象
    - $\mathcal{L}$ の平均・分散・歪度・尖度など
    - $\mathcal{L}$ の **確率関数・確率密度関数のパラメタ**

点推定

点推定

- 定義

  点推定とは $\mathcal{L}$ に含まれるパラメタ θ を $X_1, \ldots, X_n$ の関数

  $$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$$

  で推定することで，$\hat{\theta}$ を θ の **推定量** と呼ぶ.

- 記述統計量は分布のパラメタの１つ

  例: $\mathcal{L}$ の平均 μ を標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ によって推定することが点推定であり，$\bar{X}$ は μ の推定量となる.

良い推定量

- 一般に 1 つのパラメタの推定量は無数に存在
- 推定量の良さの代表的な基準: **不偏性・一致性**
  - $\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量:

    $$E[\hat{\theta}] = \theta$$

  - $\hat{\theta}$ が θ の (強) 一致推定量:

    $\hat{\theta}$ が θ に収束する確率が 1 $\quad (n \to \infty)$

  例: 標本平均, 不偏分散はそれぞれ $\mathcal{L}$ の平均, 分散の不偏かつ一致性をもつ推定量

良い不偏推定量

- 一般に不偏推定量も複数存在

  例: $\mathcal{L}$ の平均 μ の不偏推定量:
  - 標本平均 $\bar{X}$
  - X_1
  - $X_1, \ldots, X_n$ のメディアン ($\mathcal{L}$ が $x = \mu$ に関して対称な場合)
- 不偏推定量の良さを評価する基準が必要
- **一様最小分散不偏推定量**:

  θ の任意の不偏推定量 $\hat{\theta}'$ に対して推定値のばらつき (分散) が最も小さいもの

  $$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \leq \mathrm{Var}(\hat{\theta}')$$

Cramer-Rao の不等式

- 定理

  $\mathcal{L}$ は 1 次元パラメタ θ を含む連続分布とし，その確率密度関数 $f_\theta(x)$ は θ に関して偏微分可能であるとする．このとき，緩やかな仮定の下で，θ の任意の不偏推定量 $\hat{\theta}$ に対して以下の不等式が成り立つ:

  $$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(\theta)}.$$

  ただし

  $$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f_\theta(x) \right)^2 f_\theta(x) dx.$$

一様最小分散不偏推定量

- 用語の定義
  - 下界 $1/(nI(\theta))$: **Cramer-Rao 下界**
  - $I(\theta)$: **Fisher 情報量**
- 定理 (Cramer-Rao の不等式の系)

  θ の不偏推定量 $\hat{\theta}$ で分散が Cramer-Rao 下界 $1/(nI(\theta))$ に一致するものが存在すれば，それは一様最小分散不偏推定量となる．

例: 正規分布モデルの標本平均

- $\mathcal{L}$ は平均 μ , 分散 σ^2 の正規分布
  - 平均パラメタ μ に関する Fisher 情報量:

$$I(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma^2}$$

  - Cramer-Rao 下界: σ^2/n
  - 標本平均 $\bar{X}$ の分散: σ^2/n (=Cramer-Rao 下界)
- $\bar{X}$ は μ の一様最小分散不偏推定量

演習

練習問題

- X を一様乱数に従う確率変数とし，平均値の推定量として以下を考える．それぞれの推定量の分散を比較しなさい．
  - 標本平均 (mean)
  - 中央値 (median)
  - 最大値と最小値の平均 ((max+min)/2)
- ヒント: 以下のような関数を作り，Monte-Carlo 実験を行えばよい

```
myMeanEst <- function(n, min, max){ # 観測データ数
    x <- runif(n, min=min, max=max) # 一様乱数を生成，範囲は引数から
    return(c(xbar=mean(x),med=median(x),mid=(max(x)+min(x))/2))
} # 3 つまとめて計算する関数
```

最尤法

離散分布の場合

- 観測値 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ の同時確率
  - 確率関数: $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$
  - 確率関数のパラメタ: $\boldsymbol{\theta} := (\theta_1, \dots, \theta_p)$
  - 独立な確率変数の同時確率:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) = f_{\boldsymbol{\theta}}(x_1) \cdot f_{\boldsymbol{\theta}}(x_2) \cdots f_{\boldsymbol{\theta}}(x_n)$$

尤度関数

- 定義

  パラメタ $\boldsymbol{\theta}$ に対して観測データ $X_1, X_2, \dots, X_n$ が得られる理論上の確率

$$L(\boldsymbol{\theta}) := \prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\theta}}(X_i)$$

  を $\boldsymbol{\theta}$ の**尤度** と言い，$\boldsymbol{\theta}$ の関数 L を **尤度関数** と呼ぶ．

  - 観測データ $X_1, X_2, \dots, X_n$ が現れるのにパラメタ $\boldsymbol{\theta}$ の値がどの程度尤もらしいかを測る尺度

最尤法

- 最尤法:

  観測データに対して「最も尤もらしい」パラメタ値を $\boldsymbol{\theta}$ の推定量として採用する方法を最尤法という.

- 最尤推定量:

  Θ を尤度関数の定義域として，尤度関数を最大とする $\hat{\boldsymbol{\theta}}$

  $$L(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\boldsymbol{\theta}).$$

  を $\boldsymbol{\theta}$ の **最尤推定量** という.

  以下のように表現することもある.

  $$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta} L(\boldsymbol{\theta}).$$

最尤推定量の計算

- **対数尤度関数**:

  $$\ell(\boldsymbol{\theta}) := \log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(X_i).$$

  - 対数関数は狭義増加
  - $\ell(\boldsymbol{\theta})$ の最大化と $L(\boldsymbol{\theta})$ の最大化は同義
  - 扱い易い和の形なのでこちらを用いることが多い
  - 大数の法則を用いて対数尤度関数の収束が議論できる

- 最尤推定量の性質

  広い範囲の確率分布に対して最尤推定量は **一致性** を持つ

連続分布の場合

- **確率密度関数** $f_{\boldsymbol{\theta}}(x)$ を用いて尤度を定義
- **尤度関数**:

  $$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\boldsymbol{\theta}}(x_i) = f_{\boldsymbol{\theta}}(x_1)\cdot f_{\boldsymbol{\theta}}(x_2)\cdots f_{\boldsymbol{\theta}}(x_n)$$

- **対数尤度関数**:

  $$\ell(\boldsymbol{\theta}) := \log L(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f_{\boldsymbol{\theta}}(X_i)$$

例: Poisson 分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$ をパラメタ $\lambda > 0$ の Poisson 分布でモデル化
  - 対数尤度関数 (未知パラメタ: λ)

  $$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{n} (X_i \log\lambda - \log X_i!) - n\lambda$$

  - 少なくとも 1 つの i について $X_i > 0$ を仮定する

- (Poisson 分布のつづき)

- $\ell(\lambda)$ の微分:

$$\ell'(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} X_i - n, \quad \ell''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} X_i < 0$$

- 方程式 $\ell'(\lambda) = 0$ の解が $\ell(\lambda)$ を最大化
- λ の最尤推定量:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

例: 指数分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$ をパラメタ $\lambda > 0$ の指数分布でモデル化
  - 対数尤度関数 (未知パラメタ: λ)

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \log \lambda e^{-\lambda X_i} = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- (指数分布のつづき)
  - $\ell(\lambda)$ の微分:

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

  - 方程式 $\ell'(\lambda) = 0$ の解が $\ell(\lambda)$ を最大化
  - λ の最尤推定量:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

例: ガンマ分布の最尤推定

- $\mathcal{L}$ をパラメタ $\nu, \alpha > 0$ のガンマ分布でモデル化
  - 対数尤度関数 (未知パラメタ: ν, α)

$$\begin{aligned}\ell(\nu, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} X_i^{\nu-1} e^{-\alpha X_i} \\ &= n\nu \log \alpha - n \log \Gamma(\nu) + \sum_{i=1}^{n} \{(\nu - 1) \log X_i - \alpha X_i\}\end{aligned}$$

  - $\ell(\nu, \alpha)$ を最大化する ν, α は解析的に求まらないので実際の計算では数値的に求める

- R での計算例 (ガンマ分布の最尤推定量の例)

```
library(stats4) # 関数 mle を利用するため
## 数値最適化のためには尤度関数を最初に評価する初期値が必要
mle.gamma <- function(x, # 観測データ
      nu0=1, alpha0=1){ # nu, alpha の初期値
    ## 負の対数尤度関数を定義 (最小化を考えるため)
    ll <- function(nu, alpha) # nu と alpha の関数として定義
suppressWarnings(-sum(dgamma(x, nu, alpha, log=TRUE)))
    ## suppressWarnings は定義域外で評価された際の警告を表示させない
    ## 最尤推定 (負の尤度の最小化)
```

```
    est <- mle(minuslogl=ll, # 負の対数尤度関数
       start=list(nu=nu0, alpha=alpha0), # 初期値
       method="BFGS", # 最適化方法 (選択可能)
       nobs=length(x)) # 観測データ数
    return(coef(est)) # 推定値のみ返す
}
```

演習

練習問題

- 東京都の気候データ (`tokyo_weather.csv`) の風速の項目について以下の問に答えよ.

  ```
  myData <- read.csv("data/tokyo_weather.csv", fileEncoding="utf8")
  ```

  - 全データを用いてヒストグラム (密度) を作成しなさい.
  - ガンマ分布でモデル化して最尤推定を行いなさい.
  - 推定した結果をヒストグラムに描き加えて比較しなさい.
- 自身で収集したデータを用いて, モデル化と最尤推定を試みよ.

区間推定

推定誤差

- 推定量 $\hat{\theta}$ には推定誤差が必ず存在
- 推定結果の定量評価には推定誤差の評価が重要
  - "誤差 $\hat{\theta}-\theta$ が区間 $[l,u]$ の内側にある確率が $1-\alpha$ 以上 "
    ("外側にある確率が α 以下" と言い換えてもよい)

$$P(l \leq \hat{\theta}-\theta \leq u) \geq 1-\alpha$$

- パラメタの範囲の推定に書き換え
  - " θ が含まれる確率が $1-\alpha$ 以上となるような区間 $[\hat{\theta}-u, \hat{\theta}-l]$ を推定"

$$P(\hat{\theta}-u \leq \theta \leq \hat{\theta}-l) \geq 1-\alpha$$

区間推定

- 定義

  区間推定とは未知パラメタ θ とある値 $\alpha \in (0,1)$ に対して以下を満たす確率変数 L, U を観測データから求めることをいう.

$$P(L \leq \theta \leq U) \geq 1-\alpha$$

  - 区間 $[L,U]$: $1-\alpha$ **信頼区間** ($100(1-\alpha)$ % と書くことも多い)
  - L : $1-\alpha$ **下側信頼限界**
  - U : $1-\alpha$ **上側信頼限界**
  - $1-\alpha$: **信頼係数** ($\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ とすることが多い)

信頼区間の性質

- 信頼区間は幅が狭いほど推定精度が良い
  - 真のパラメタが取りうる値の範囲を限定することになるため
- 最も推定精度の良い $1{-}\alpha$ 信頼区間 $[L, U]$

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1{-}\alpha$$

  - 信頼区間の幅が狭いほど $P(L \leq \theta \leq U)$ は小さくなるため
- 実行可能である限り $1{-}\alpha$ 信頼区間 $[L, U]$ は上式を満たすように L, U を決定する

正規母集団の区間推定

平均の区間推定 (分散既知)

- 正規分布に従う独立な確率変数の重み付き和は正規分布に従う
- 一般の場合

  $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ を独立な確率変数列とし，各 $i = 1, 2, \ldots, k$ に対して Z_i は平均 μ_i ，分散 σ_i^2 の正規分布に従うとする．このとき $a_0, a_1, \ldots, a_k$ を $(k+1)$ 個の 0 でない実数とすると，$a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i Z_i$ は平均 $a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \mu_i$ ，分散 $\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \sigma_i^2$ の正規分布に従う．

- 同分布の場合

  $k = n,\ \mu_i = \mu,\ \sigma_i^2 = \sigma^2,\ a_0 = 0,\ a_i = 1/n\ (i = 1, \ldots, n)$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \quad (\text{標本平均})$$

  は平均 μ , 分散 σ^2/n の正規分布に従う．

- 同分布を標準化した場合

  $k = 1$, $\mu_1 = \mu$, $\sigma_1^2 = \sigma^2/n$, $a_0 = -\sqrt{n}\mu/\sigma$, $a_1 = \sqrt{n}/\sigma$

$$Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$$

  は標準正規分布に従う．

- 標準化した確率変数の確率

  $z_{1-\alpha/2}$ を標準正規分布の $1{-}\alpha/2$ 分位点とすれば

$$P\Big(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\Big) = 1{-}\alpha$$

- 信頼区間の構成

  μ について解くと

$$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1{-}\alpha$$

  となるので，σ が既知の場合の平均 μ の $1{-}\alpha$ **信頼区間** は以下で構成される．

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

平均の区間推定 (分散未知)

- χ^2 分布の特徴付け
  - 標準正規分布に従う k 個の独立な確率変数の二乗和は自由度 k の χ^2 分布に従う
- t 分布の特徴付け
  - Z を標準正規分布に従う確率変数，Y を自由度 k の χ^2 分布に従う確率変数とし，Z, Y は独立であるとする．このとき確率変数

    $$\frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

    は自由度 k の t 分布に従う
- 標本平均と不偏分散の性質

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立同分布な確率変数列で，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うとする．不偏分散を

  $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

  とすると，$\bar{X}$ と s^2 は独立であり，確率変数 $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う．
- 標準化した確率変数の性質

  前の命題と $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma$ が標準正規分布に従うことから，確率変数

  $$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)s^2/\sigma^2/(n-1)}}$$

  は自由度 $n-1$ の t 分布に従う．
- 信頼区間の構成

  $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ を自由度 $n-1$ の t 分布の $1-\alpha/2$ 分位点とすれば

  $$P\left(-t_{1-\alpha/2}(n-1) \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{s} \leq t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

  となるので，分散が未知の場合の平均 μ の $1-\alpha$ **信頼区間** は以下で構成される．

  $$\left[\bar{X} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

分散の区間推定

- 不偏分散の性質

  $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布に従う
- 不偏分散の確率

  $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$，$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ をそれぞれ自由度 $n-1$ の χ^2 分布の $\alpha/2, 1-\alpha/2$ 分位点とすれば

  $$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1) \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$
- 信頼区間の構成

σ^2 について解くと

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha$$

となるので，σ^2 の $1-\alpha$ **信頼区間** は以下で構成される．

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

漸近正規性にもとづく区間推定

推定量の漸近正規性

- **漸近正規性**: 多くの推定量 $\hat{\theta}$ の分布は正規分布で近似できる
  - モーメントに基づく記述統計量は漸近正規性をもつ
  - 最尤推定量は広い範囲の確率分布に対して漸近正規性をもつ
  - いずれも中心極限定理にもとづく
- 正規分布を用いて近似的に信頼区間を構成することができる

標本平均の漸近正規性

- 定理

  確率分布 $\mathcal{L}$ が 2 次のモーメントを持てば，$\mathcal{L}$ の平均 μ の推定量である標本平均は漸近正規性をもつ．

  $$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

  $\mathcal{L}$ の標準偏差を σ とすれば, 任意の $a \leq b$ に対して以下が成立する．(ϕ は標準正規分布の確率密度関数)

  $$P\left(a \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq b\right) \to \int_a^b \phi(x)dx \quad (n \to \infty)$$

平均の区間推定 (分散既知)

- 標本平均の確率

  $z_{1-\alpha/2}$ を標準正規分布の $1-\alpha/2$ 分位点とすれば

  $$P\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \to 1-\alpha \quad (n \to \infty)$$

  となるので，μ について解くと以下が成り立つ．

  $$P\left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \to 1-\alpha \quad (n \to \infty)$$

- 信頼区間の構成

  σ が既知の場合の平均 μ の $1-\alpha$ **信頼区間**は以下で構成される．

  $$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

  (サンプル数 n が十分大きい場合に近似的に正しい)

平均の区間推定 (分散未知)

- σ をその一致推定量 $\hat{\sigma}$ で置き換えてもそのまま成立する
  - $\hat{\sigma}$ としては例えば不偏分散の平方根を用いる

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

  - 実問題で平均はわからないが，分散はわかるという場合はあまりない
  - t -分布は自由度 $n \to \infty$ で標準正規分布なる

- 信頼区間の構成

  σ が未知の場合の平均 μ の $1-\alpha$ **信頼区間**は以下で構成される．

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

  (サンプル数 n が十分大きい場合に近似的に正しい)

最尤推定量の区間推定

- 定理 (最尤推定量の漸近正規性)

  $\mathcal{L}$ が 1 次元パラメタ θ を含む連続分布とするとき，最尤推定量 $\hat{\theta}$ は平均 θ (真の値)，分散 $1/nI(\hat{\theta})$ の正規分布で近似できる．

- 信頼区間の構成

  θ の $1-\alpha$ **信頼区間** は以下で構成される．

$$\left[\hat{\theta} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}},\ \hat{\theta} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{nI(\hat{\theta})}}\right]$$

  (サンプル数 n が十分大きい場合に近似的に正しい)

演習

練習問題

- 東京都の気候データ (`tokyo_weather.csv`) の日射量の項目について以下の問に答えよ．
  - 全データによる平均値を計算しなさい．
  - ランダムに抽出した 50 点を用いて，平均値の 0.9(90%) 信頼区間を求めなさい．
  - 上記の推定を 100 回繰り返した際，真の値 (全データによる平均値) が信頼区間に何回含まれるか確認しなさい．
- 自身で収集したデータで区間推定を試みよ．